

Der Stoßeffekt auf eine Flüssigkeitskugel als Grundlage einer physikalischen Theorie der Entstehung von Gehirnverletzungen

Von WERNER GÜTTINGER

Aus dem Physikalischen Institut der Universität Tübingen

(Z. Naturforsch. 5a, 622—628 [1950]; eingegangen am 15. Mai 1950)

Um die Theorie der Entstehung von Gehirnverletzungen durch äußere Kräfte physikalisch zu begründen, werden die Schwingungen berechnet, die durch Stoß auf eine flüssigkeitsgefüllte Hohlkugel entstehen. Die sich ergebenden Druckschwankungen beschreiben sowohl den „contre-coup-Effekt“ als auch Verletzungen in der Gehirnmitte und stimmen in befriedigender Weise mit der Erfahrung überein. Zur Berechnung der Flüssigkeitsschwingungen wird jedoch nicht die den Vorgang beschreibende, inhomogene partielle Differentialgleichung für das Geschwindigkeitspotential ψ :

$$\Delta\psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + k \frac{\partial V}{\partial t}$$

verwendet, da das darin enthaltene Potential V der einwirkenden Kraft eine Lösung des Problems erschwert. Vielmehr wird zunächst ein momentan wirkender Stoß mittels der Differentialgleichung für die freien Schwingungen $\Delta\psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ berechnet und daraus durch Anwendung eines Faltungsintegrals der Vorgang bei beliebigem Zeitverlauf der Stoßkraft bestimmt.

Die vorliegende Arbeit über den Stoßeffekt auf eine mit kompressibler Flüssigkeit beliebiger Dichte gefüllte Hohlkugel entstand aus dem Bedürfnis heraus, die physikalischen Prinzipien der Entstehung von Gehirnverletzungen durch äußere Kräfte, die jedoch keinen Bruch der Schädeldecke bewirken, zu klären^{1,2}. Um das Problem überhaupt einer mathematisch-physikalischen Behandlung zugänglich zu machen, müssen Idealisierungen vorgenommen werden. Vorausgesetzt wird zunächst die Kugelform der die Hirnsubstanz einschließenden starren Schädeldecke. Für den von außen betrachteten Schädel trifft dies natürlich nicht zu. Aber es kommt hier nur auf die die Hirnsubstanz unmittelbar umschließende innere Schicht der Schädeldecke an, welche nahezu kugelförmig ist. Ferner wird die Hirnsubstanz als homogen angenommen. Bezuglich der von uns untersuchten Effekte ist diese Annahme, wie die pathologischen Befunde zeigen, gerechtfertigt. Zweifellos werden durch diese Idealisierungen die wesentlichen Vorgänge im Schädel erfaßt bzw. herausgehoben. Im Teil I werden die mathematisch erzielten Ergeb-

¹ Vgl. Sjövall, The genesis of skull and brain injuries, Stockholm 1943.

² Die Anregung dazu wurde durch Untersuchungen gegeben, die Dr. Stochdorph 1948 im Kaiser-Wilhelm-Institut für Hirnforschung in Tübingen durchgeführt hat.

nisse kurz physikalisch interpretiert. Teil II der Arbeit behandelt das mathematische Problem. Eine ausführliche Erörterung der entstehenden Druckwellen, insbesondere deren Abhängigkeit von der Stoßdauer und der Stoßform, wird in Teil III gegeben.

I. Physikalische Interpretation der Theorie

Sieht man den Schädel beim Stoßvorgang als starr an, so bewegt er sich beim Stoß nur translatorisch und nimmt dabei seinen Inhalt mit. Wenn der Schädel vor dem Stoß ruht, so wird sein Inhalt nach dem Stoß infolge seiner Trägheit auf der Stoßseite komprimiert und auf der entgegengesetzten Seite (Gegenpol) expandiert (vgl. Abb. 1). Die entstehenden Druckwellen werden an der starren Schädeldecke reflektiert; sie pflanzen sich in das Innere fort und treffen sich in der Mitte. Dort heben sie sich auf, so daß in der Mitte der Normaldruck herrscht. Bevor sich die beiden Störungen in der Mitte überlagern, entsteht in ihrer Umgebung eine Druckdifferenz, die größer ist als der Druck an der Stoßstelle bzw. die entsprechende Verdünnung am Gegenpol. Der Druck p ist die Abweichung vom Normaldruck. Dies zeigt Abb. 2.

Die Störungen wandern unter gleichzeitiger Überlagerung weiter und werden an den gegenüberliegen-



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

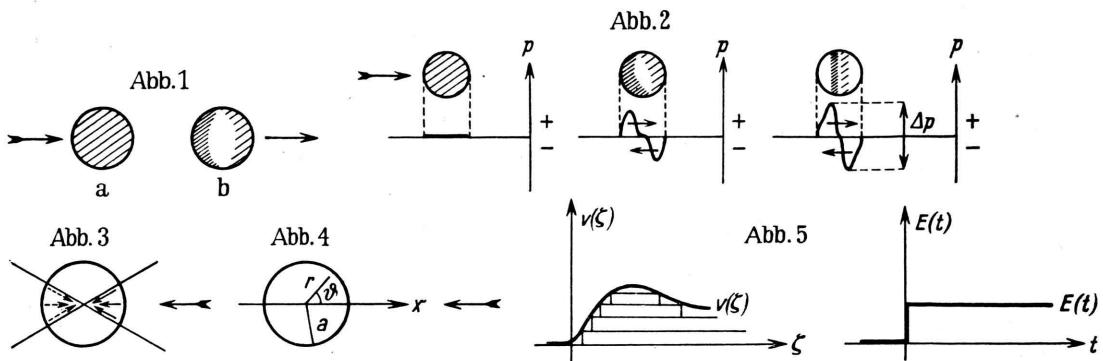


Abb. 1. Stoßvorgang: a Schädel in Ruhe; b Schädel beschleunigt; (\rightarrow Stoß).

Abb. 2. Druckverhältnisse beim Stoßeffekt. Δp = Druckdifferenz um den Kugelmittelpunkt.

den Wandungen reflektiert. Die reflektierten Wellen stoßen gegen den Mittelpunkt vor und erzeugen dort wiederum eine starke Druckdifferenz unter Vertauschung der früheren Kompressions- und Dilatationsgebiete. Je nach Stoßdauer und Stoßform können die nach innen vorstoßenden Störungen stärker oder schwächer werden. Es muß jedoch bei der Fortpflanzung der Druckwellen noch die Dämpfung berücksichtigt werden, die diese Wellen durch die innere Reibung der Gehirnsubstanz erleiden. Diese Dämpfung bewirkt, daß der Durchgang eines Druckextremums durch die Schädelmitte nur wenige Male stattfindet; es werden also für Verletzungen nicht etwa hin- und herpendelnde Extrema verantwortlich sein. Trotz der in der mathematischen Theorie angenommenen Dämpfungsfreiheit wird an der Stoßseite keine merkliche Dilatation auftreten, abgesehen vom Momentanstoß, da infolge der endlichen Stoßdauer auf der Stoßseite eine Flüssigkeitsstauung auftritt, vermöge deren positivem Druck die dort vorhandene Dilatation kompensiert wird. Bei zusätzlich angenommener Dämpfung durch die Hirnsubstanz selbst wird im wesentlichen nur eine einzige ganze Schwingung von Bedeutung sein. Von ausschlaggebender Bedeutung für die Verletzungen sind die Dilatationen und nicht die Kompressionen, denn die Dilatationen bewirken ein Zerreissen der Substanz. Bei allen Stoßeffekten kann prinzipiell eine Verletzung sowohl am Gegenpol (contre-coup-Effekt) als auch in der Mitte des Gehirns auftreten. Verletzungen direkt hinter der Aufschlagstelle sind seltener, da dort zunächst nur ein Kompressionszustand vorliegt. Nur bei starken Stößen werden diese Verletzungen häufiger; sie sind anderen Charakters als die Verletzungen am Gegenpol und in der Mitte. Ob eine Verletzung im Inneren auftritt, hängt von der

Abb. 3. Winkelabhängigkeit der Druckwellen.

Abb. 4. Bezugssystem in der Kugel.

Abb. 5. Darstellung einer beliebigen Stoßkraft durch Momentanstöße.

zeitlichen Form, Stärke und Dauer des Stoßes ab. Die Druckwellen, von denen anfangs die Rede war (Grunddruckverteilung), sind jedoch immer vorhanden. Es ist ferner zu bemerken, daß in der ganzen Äquatorebene, die senkrecht zur Stoßrichtung steht, der Druck immer Null ist, und daß die vorstoßenden Druckwellen nur in einem gewissen Winkelraum nach der Mitte hinzielen (vgl. Abb. 3), während sie außerhalb von ihm kaum zur Geltung kommen.

Schließlich ist noch die Abhängigkeit des Verletzortes von der Härte der Schädeldecke zu untersuchen. Ist die Schädeldecke besonders starr, so wird sicher eine Verletzung in erster Linie am Gegenpol auftreten (contre-coup-Effekt) und eine Verletzung in der Mitte. Bei kurzem Stoß (Stoßdauer kleiner als Laufzeit der Wellen) treten hauptsächlich Verletzungen auf der Stoßseite auf, während bei langer Stoßdauer in erster Linie der contre-coup-Effekt stattfindet. Verletzungen im Inneren können in beiden Fällen entstehen. Im ersten Fall wird sich ebenfalls die Grunddruckverteilung ausbilden. Da aber bei kurzem Stoß die Schädeldecke nach einer der Kürze des Stoßes proportionalen minimalen Eindellung wieder elastisch in den Ausgangszustand zurückkehrt, so wird sofort nach der anfänglichen Kompression hinter der Aufschlagstelle eine starke Verdünnung entstehen, so daß in diesem Fall die Verletzung im wesentlichen an der Stoßstelle liegt. Die von der Stoßstelle nach innen fortschreitenden Kompressionsstörungen, zwischen denen jetzt ein Dilatationsgebiet liegt, erzeugen in der Mitte zusammen mit der vom Gegenpol kommenden Druckwelle eine rasch oszillierende Druckdifferenz, so daß dort die Verletzungen nicht mehr von der bisherigen Art sein werden.

II. Theorie des Stoßeffekts auf eine Flüssigkeitskugel

Unter den üblichen Bedingungen, welche bei den Grundgleichungen der Hydrodynamik vorausgesetzt werden³, sind die den freien Schwingungsvorgang beschreibenden Differentialgleichungen gegeben durch

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \Delta p, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \psi \quad (1a)$$

für den Druck p und das Geschwindigkeitspotential ψ . Dämpfungsfreiheit wird vorausgesetzt. p wird gemessen als Abweichung vom Normaldruck. c ist die Schallgeschwindigkeit. Als Bezugssystem wird ein mit der — frei beweglichen — Kugel fest verbundenes Polarkoordinatensystem $\langle r, \vartheta, \varphi \rangle$ gewählt, dessen Polarachse in die Stoßrichtung fällt (vgl. Abb. 4). Der Kugelradius sei a . Dem Problem ist die Randbedingung $(\partial \psi / \partial r)_{r=a} = 0$ zugrunde gelegt, welche das Verschwinden der Radialkomponente der Schnelle v an der Kugeloberfläche kennzeichnet. Gl. (1a) lautet in Kugelkoordinaten

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

und kann durch den Separationsansatz

$$\psi = \psi(r, \vartheta, \varphi, t) = g(t) u(r, \vartheta, \varphi)$$

gelöst werden. Es ergibt sich in bekannter Weise⁴:

$$g(t) = a \exp(i \omega t) + b \exp(-i \omega t),$$

wobei $k = \omega/c$ die Wellenzahl, $\lambda = 2\pi/k$ die Wellenlänge und ω die Kreisfrequenz bedeuten. Ferner ergibt sich, daß

$$u(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \Theta(\vartheta) \Phi(\varphi)$$

ist, mit

$$R = R_n(r) = \frac{J_{n+1/2}(kr)}{(kr)^{1/2}}, \quad \Theta(\vartheta) = P_n^m(\cos \vartheta),$$

$$a_{nml} = \frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{k^3 n_l}{[k^2 n_l a^2 - n(n+1)] J_{n+1/2}^2(k_n a)} \int [\psi_0 + (1/i \omega_n) \psi_0'] \overline{u_{nml}} d\Omega \quad (5)$$

$$b_{nml} = \frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{k^3 n_l}{[k^2 n_l a^2 - n(n+1)] J_{n+1/2}^2(k_n a)} \int [\psi_0 - (1/i \omega_n) \psi_0'] \overline{u_{nml}} d\Omega.$$

³ Vgl. A. Sommerfeld, Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. 2, S. 90, Leipzig 1947.

⁴ loc. cit.³ Bd. 6, S. 178, Leipzig 1947.

$$\psi = \Phi_m(\varphi) = a_m \exp(i m \varphi) + b_m \exp(-i m \varphi).$$

$P_n^m(\cos \vartheta)$ sind die zugeordneten Legendreschen Polynome und $J_{n+1/2}(kr)$ Bessel-Funktionen mit halbzahligen Indizes. Die Erfüllung der Randbedingung

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_{r=a} = 0 \text{ bedeutet, daß}$$

$$(\partial u / \partial r)_{r=a} = 0 \text{ ist,}$$

d. h. daß

$$2k a J'_{n+1/2}(ka) = J_{n+1/2}^2(ka) \quad (2)$$

gelten muß. Die unendlich vielen reellen Wurzeln $k = k_{nl}$ von (2) bilden das diskrete Eigenwertspektrum der Differentialgleichung (1a). Die allgemeinste Eigenfunktion wird somit

$$u = u_{nml}$$

$$= (rk_{nl})^{-1/2} J_{n+1/2}(k_{nl} r) P_n^m(\cos \vartheta) \exp(i m \varphi), \quad (3)$$

wobei $n, l = 0, 1, 2, \dots$ und $-n \leq m \leq +n$ ist. Die Vollständigkeit dieses Orthogonalsystems gestattet, die Lösung der Differentialgleichung (1a) anzusetzen in der Entwicklung

$$\psi = \psi(r, \vartheta, \varphi, t) = \sum_{n, m, l} [a_{nml} \exp(i \omega_{nl} t) + b_{nml} \exp(-i \omega_{nl} t)] u_{nml}. \quad (4)$$

Die Lösung kann einem vorgegebenen Anfangszustand angepaßt werden: ψ wird so bestimmt, daß $\psi = \psi_0$ und $\partial \psi / \partial t = \psi_0'$ für $t = 0$ willkürlich vorgegebene Funktionen sind. Die Bestimmung der a_{nml} , b_{nml} erfolgt⁵ durch Multiplikation von (4) mit den konjugierten Eigenfunktionen $\overline{u_{nml}}$ von u_{nml} , und Integration über den ganzen Bereich. Wegen

$$\int_0^a J_{n+1/2}(k_{nl} r) J_{n+1/2}(k_{\lambda} r) r dr = \begin{cases} \frac{k_{nl}^2 a^2 - n(n+1)}{2 k_{nl}^2} & (\lambda = l) \\ 0 & (\lambda \neq l) \end{cases}$$

ergibt sich mit

$$d\Omega = r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi :$$

⁵ Vgl. F. Sauter, Differentialgleichungen der Physik, Sammlung Göschen, Bd. 1070, S. 102, Leipzig 1942.

Durch die Beziehung (4), wobei für a_{nml} und b_{nml} die Ausdrücke (5) einzusetzen sind, werden die freien Schwingungen der Flüssigkeit in der Kugel beschrieben.

Ein auf die Kugel ausgeübter Momentanstoß, der also nur in einem bestimmten Zeitpunkt $t = 0$ wirkt, kann durch die Gl. (4) dargestellt werden, indem man ψ_0 und ψ'_0 passend wählt.

Zur Zeit $t < 0$ sei die Kugel samt Flüssigkeit in Ruhe. Im Zeitpunkt $t = 0$ werde die Kugel plötzlich in Richtung der negativen x -Achse in Bewegung gesetzt. Der Stoß, der nur im Zeitpunkt $t = 0$ wirken soll, beschleunigt die Kugelschale auf die Geschwindigkeit $v(t) = v_0 = \text{konstant}$, welche die Schale für $t > 0$ beibehält. Für $t < 0$ und $t > 0$ haben wir also keine äußeren Kräfte. Die Kugelschale hat die Geschwindigkeit

$$v(t) = (v_0/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} (1/i\omega) \exp(i\omega t) d\omega = \begin{cases} 0 & (t \leq 0) \\ v_0 & (t > 0) \end{cases} \quad (6)$$

$$S = \int \psi_0 \overline{u_{nml}} d\Omega = \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} v_0 r \cos \vartheta J_{n+1/2}(k_{nl} r) / (k_{nl} r)^{1/2} P_n^m(\cos \vartheta) \exp(i m \varphi) d\Omega,$$

woraus folgt, daß $m = 0$ und $n = 1$ sein muß, da sonst $S = 0$ wäre. Dann ergibt sich für S der Wert

$$S = \int \psi_0 \overline{u_{nml}} d\Omega = \frac{4\pi v_0 a^{3/2}}{3 (k_{1l})^{5/2}} J_{3/2}(k_{1l} a). \quad (8)$$

Wegen $m = 0$ sind p und ψ nicht mehr von φ abhängig. Damit sind die a_{nml} , b_{nml} bestimmt, und mit $k_{1l} \equiv k_l$ und $\omega_l = k_l c$ folgt als Lösung der Schwingungsgleichung im Falle des Momentanstoßes aus (4):

$$\psi = \psi(r, \vartheta, t) = 2 v_0 a^{3/2} \cos \vartheta r^{-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} [(k_n^2 a^2 - 2) J_{3/2}(k_n a)]^{-1} \cos(\omega_n t) J_{3/2}(k_n r). \quad (9)$$

Damit ist der Druck $p = -\varrho \partial \psi / \partial t$ gegeben durch

$$p = p(r, \vartheta, t) = c \varrho v_0 a^{1/2} \cos \vartheta \overline{p}(r, t), \quad (10)$$

wobei

$$\overline{p}(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r) \sin(\omega_n t) \quad (11)$$

und

$$c_n(r) = a_n J_{3/2}(k_n r) / r^{1/2}, \quad a_n = \frac{2 k_n a}{[k_n^2 a^2 - 2] J_{3/2}'(k_n a)}$$

ist. Dabei bestimmt sich k_n aus (2), d. h. wegen $n = 1$ aus

$$\operatorname{tg}(k a) = \frac{2 k a}{2 - k^2 a^2}. \quad (12)$$

Mit dem Ansatz $k a = n \pi - \varepsilon$ folgt aus (12) durch sukzessive Approximation:

$$k_n a = n \pi - 2/n \pi - 16/3 n^2 \pi^2 + \dots$$

Die Trägheit der Flüssigkeit bewirkt, daß für $t = 0$ die Flüssigkeitsteilchen relativ zu dem mit der Schale bewegten Polarkoordinatensystem die Schnelle $v = \operatorname{grad} \psi = v_0 e$ (e = Einheitsvektor in der x -Richtung) haben. Für $t = 0$ ist also $\partial \psi / \partial x = v_0$ und daher

$$\psi(r, \vartheta, \varphi, t = 0) \equiv \psi_0 = v_0 x = v_0 r \cos \vartheta.$$

Für $t \leq 0$ ist der Druck $p = 0$. Wegen $p = -\varrho \partial \psi / \partial t$ sind nun die Anfangsbedingungen, die den freien Schwingungen aufzuerlegen sind, damit der Schwingungsvorgang einem Momentanstoß entspricht, gegeben durch:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= v_0 r \cos \vartheta, \\ \psi_0' &\equiv -p_0 / \varrho = (\partial \psi / \partial t)_{t=0} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

(ϱ = Flüssigkeitsdichte).

Aus (5) folgt mit (7) ein Integral der Form

und daraus ergeben sich die ersten Zahlenwerte $k_n a$ zu:

$$k_1 a = 2,0815; \quad k_2 a = 5,9402; \quad k_3 a = 9,206, \dots$$

Zur numerischen Auswertung der Reihe (11) wird der Reihenrest $R_N = \sum_{n=N}^{\infty} c_n(r) \sin(\omega_n t)$ abgeschätzt.

Unter Verwendung bekannter asymptotischer Entwicklungen⁶ für die Bessel-Funktionen folgt

$$a_n \simeq (-1)^{n+1} (2/n)^{1/2} \quad \text{für } n \geq 6.$$

Damit wird

$$R_N \simeq \sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n J_{3/2}^0\left(\frac{n \pi r}{a}\right) J_{3/2}^0\left(\frac{n \pi c t}{a}\right), \quad (N > 6),$$

⁶ Vgl. Fußnote 4, S. 100.

für alle $t, r > Ma/N\pi$, $M > 5$ und $r \geq 0,068$; $J_{n/2}^0(x) =$ asymptotische Entwicklung von $J_{n/2}(x)$. Wegen des unstetigen Charakters des Momentanstoßes hat \bar{p} gewisse Singularitäten. Innerhalb des Konvergenzgebietes der Reihe läßt sich aber mit der Integraldarstellung von R_N :

$$R_N \simeq \frac{(-a/\pi^2 \sqrt{rc})}{\pi(r-c)/2a} \int_{\pi(r-c)/2a}^{\pi(r+c)/2a} [\cos(2N-1)x/\cos x] dx$$

eine numerische Auswertung von (10) erreichen.

Um den Druckzustand für einen Stoß zu berechnen, bei dem die Dauer der Kraftwirkung auf die Kugelschale ungleich Null ist, der also bei einer Stoßdauer $\tau > 0$ vorhanden sein wird, gehen wir folgendermaßen vor:

Mit $v_0 = 1$ ist für $t \geq 0$ die Funktion

$$p' = [c \varrho a^{1/2} \cos \vartheta] \bar{p}(r, t) \quad (10a)$$

die Druckfunktion, die den Zustand im Kugellinneren kennzeichnet, wenn die Kugelschale eine Bewegung gemäß einem Einheitssprung der Geschwindigkeit:

$$E(t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} (1/i\omega) \exp(i\omega t) d\omega$$

ausführt, also einem Momentanstoß ausgesetzt ist. Führt nun die Kugel eine Bewegung in Richtung der negativen x -Achse mit der beliebigen Geschwindigkeit $v(t)$ aus, so gibt die Ableitung $\dot{v}(t) \equiv dv/dt$ von $v(t)$ die Kraft an, die auf die Kugel wirkt. Man kann $v(t)$ durch Überlagerung von Funktionen $E(t)$ darstellen (vgl. Abb. 5). Faßt man in (10a) nur die t -Abhängigkeit ins Auge, $p' = f(t)$, so trägt das im Zeitpunkt $\zeta > 0$ auftretende Funktionselement $dv(t)$ zu der gesuchten Druckfunktion mit

$$dp = f(t - \zeta) dv = f(t - \zeta) [dv(\zeta)/d\zeta] d\zeta$$

bei, da p linear von v_0 abhängt. Bis zum Zeitpunkt t ist dieser Beitrag dann gegeben durch

$$p = \int_0^t f(t - \zeta) \dot{v}(\zeta) d\zeta. \quad (13)$$

Ist $v(0) \neq 0$, so gilt

$$p = \int_0^t f(t - \zeta) \dot{v}(\zeta) d\zeta + f(t)v(0).$$

Man kann auf diese Weise eine Kraftwirkung von einer zeitlichen Dauer $\tau > 0$ durch Überlagerung von Momentanstößen ausdrücken. Der Ausdruck (13) ist als Faltungsintegral bekannt. Für eine Bewegung der Kugel in der negativen x -Richtung mit der Geschwindigkeit $v(t)$ ergibt sich also die den Zustand im Kugellinneren beschreibende Druckfunktion zu

$$p = p(r, \vartheta, t) = \int_0^t f(t - \zeta) \dot{v}(\zeta) d\zeta \\ = [\varrho c a^{1/2} \cos \vartheta] \int_0^t \bar{p}(r, t - \zeta) \dot{v}(\zeta) d\zeta,$$

d. h. zu

$$p(r, \vartheta, t) = \varrho c a^{1/2} \cos \vartheta \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r) \int_0^t \sin[\omega_n(t - \zeta)] \dot{v}(\zeta) d\zeta. \quad (14)$$

Durch $\dot{v}(t)$ ist die Stoßkraft im wesentlichen bestimmt. Der Zeitverlauf der Stoßkraft sei nun speziell gegeben durch (τ bedeutet die Stoßdauer):

$$v(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 0) \\ v_0 t/\tau & (0 \leq t \leq \tau) \\ v_0 & (t \geq \tau) \end{cases} \quad \text{d. h.}$$

$$\dot{v}(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 0) \\ v_0/\tau & (0 \leq t \leq \tau) \\ 0 & (t \geq \tau) \end{cases}.$$

Dann wird

$$\text{a) für } 0 \leq t \leq \tau: p = p(r, \vartheta, t) = [\varrho c a^{1/2} v_0 \cos \vartheta] p_1(r, t), \quad (15)$$

$$\text{b) für } t \geq \tau: p = p(r, \vartheta, t) = [\varrho c a^{1/2} v_0 \cos \vartheta] p_2(r, t), \quad (16)$$

wobei

$$p_1(r, t) = (2a/c\tau) \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r) \sin^2(\omega_n t/2)/(k_n a)$$

und

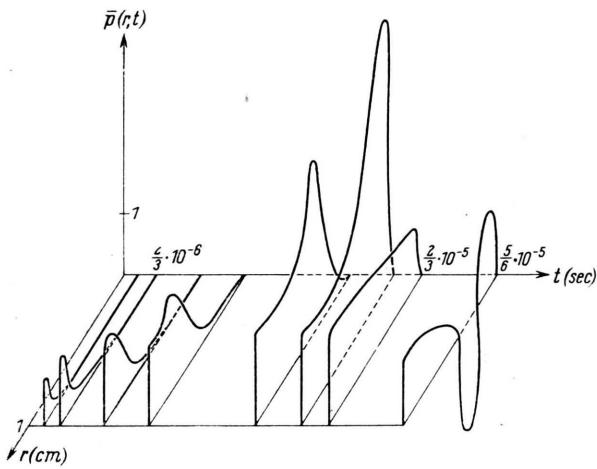
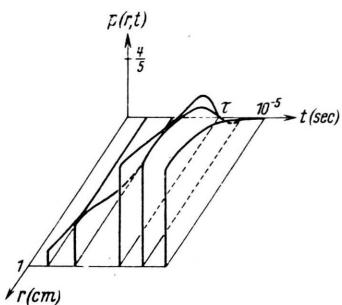
$$p_2(r, t) = (2a/c\tau) \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r) \sin[\omega_n(t - \tau/2)] \sin(\omega_n \tau/2)/(k_n a)$$

ist.

III. Diskussion der Druckzustände

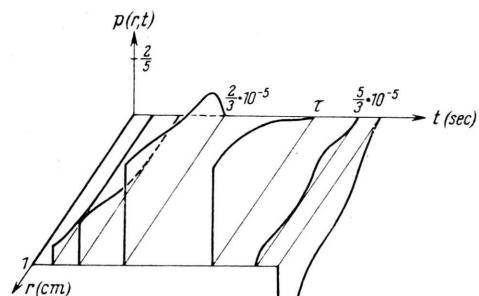
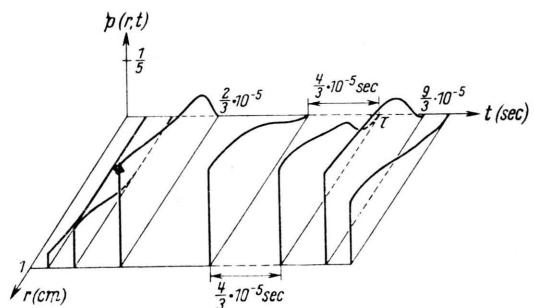
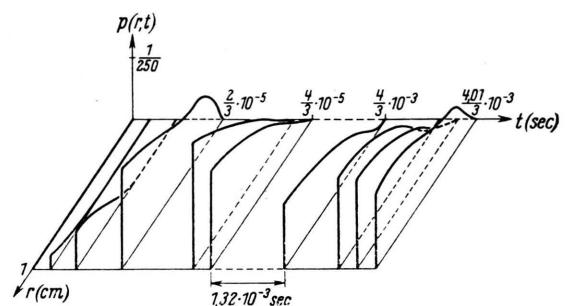
Abb. 6 zeigt die Funktion $\bar{p}(r, t)$ und damit im wesentlichen (d. h. abgesehen von dem die Winkelabhängigkeit ϑ angebenden Faktor $c \varrho v_0^{1/2} \cos \vartheta$) den Druck p beim Momentanstoß für verschiedene Werte von t und r .

Die Abb. 7 bis 10 geben den Druckverlauf in der Kugel für verschiedene Werte der Stoßdauer τ wieder. Dabei wurde der Kugelradius $a = 1$ angenommen, was keine Beschränkung darstellt.

Abb. 6. Momentanstoß ($\tau = 0$).Abb. 7. Druckverlauf für $\tau = a/c$.

Im Kugelmittelpunkt ist wegen $c_n(0) = 0$ immer $p=0$. Ferner ist in der ganzen Äquatorebene $\vartheta=\pi/2$, die durch $r=0$ geht und senkrecht zur Bewegungsrichtung steht, immer $p=0$ (wegen $\cos \pi/2 = 0$). Die Abhängigkeit der Druckfunktionen p von $\cos \vartheta$ zeigt, daß die Druckfunktionswerte in zur Äquatorebene spiegelbildlich gelegenen Punkten entgegengesetzt gleich sind. Abb. 6 (Momentanstoß) zeigt ein vom Stoßpunkt gegen den Mittelpunkt vorstoßendes Druckmaximum. Ihm entspricht ein vom Gegenpol analog vorstoßendes Druckminimum. In der Um-

gebung des Mittelpunktes entsteht dann eine extreme Druckdifferenz, kurz bevor sich die beiden Druckwellen überlagern. Von jedem Punkt der Kugeloberfläche geht eine Welle aus, deren Amplitudenfaktor

Abb. 8. Druckverlauf für $\tau = 2 a/c$.Abb. 9. Druckverlauf für $\tau = 4 a/c$.Abb. 10. Druckverlauf für $\tau = 200 a/c$.

sich entsprechend $\cos \vartheta$ abschwächt. Für τ -Werte größer als Null weisen die Abb. 7 bis 10 keine so starken Extrema auf wie Abb. 6. Vielmehr pflanzt sich eine „Druckfront“ nach der Mitte fort. Die Ausbildung von ausgeprägten Extrema — wie beim Momentanstoß — erfolgt deswegen nicht, weil die von der plötzlichen Beschleunigung der Schale in $t = 0$ herrührende Druckstörung durch die noch bis $t = \tau$ andauernde Beschleunigung der Kugelschale eine Art Dämpfung erfährt, da die Trägheitskräfte der Flüssigkeitsteilchen der Beschleunigung entgegen-

wirken. Trotzdem ist die Druckdifferenz in der Umgebung des Nullpunktes noch sehr bedeutend. Mit kleiner werdendem τ werden die Druckkurven immer höher (vgl. die Maßstäbe in den Abbildungen!). Es bilden sich, wenn $\tau \ll a/c$ ist, für $t > \tau$ auch scharfe Extrema aus. Interessant ist ferner die Beziehung zwischen der Stoßdauer τ und dem Verhältnis a/c . Ist $\tau = 4na/c$, d. h. ist der Stoß gerade dann beendet, wenn die von $r = a$, $\vartheta = 0$ ausgehende Anfangsstörung nach n -maliger Reflexion am Gegenpol wieder zum Ausgangspunkt zurückgekehrt ist, so wird die für $t > \tau$ nach der Mitte vorstoßende Druckfront besonders stark (vgl. Abb. 9, 10). Ist dagegen $\tau = (4n+2)a/c$, d. h. ist eine von $r = a$, $\vartheta = 0$ ausgehende Welle gerade bei $r = a$, $\vartheta = \pi$ angekommen, so schwächt sich die nach der Mitte vorstoßende Welle schnell ab (vgl. Abb. 8). Abb. 7 zeigt einen

Druckverlauf, wenn $\tau = a/c$ ist. Bei einer Stoßkraft der Form einer Gaußschen Fehlerkurve:

$$v(t) = 0 \quad (t \leq 0); \quad v(t) = 2v_0/\tau \sin^2(\pi t/\tau) \quad (0 \leq t \leq \tau);$$

$$v(t) = 0 \quad (t \geq \tau)$$

bekommt man, wie eine numerische Auswertung zeigt, schärfere Extrema. Bis zum Zeitpunkt $t = \tau/2$ ist keine vorstoßende Störung festzustellen; denn bis dahin baut sich nur in der Umgebung der Kugelschale ein Extremum auf — entsprechend der stetigen Stoßkraft —, während der Druck in Richtung zum Kugelmittelpunkt rasch abklingt (Stauungsvorgang). Erst von $t = \tau$ ab stoßen Wellen ins Innere vor, aber dann mit stark ausgeprägten Extrema.

Hrn. Prof. Dr.-Ing. H. Tischner bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für zahlreiche fördernde Ratschläge und Diskussionen zu großem Dank verpflichtet.

NOTIZEN

Über Assoziation von Dipolmolekülen in Flüssigkeiten und Lösungen aus Messungen der dielektrischen Relaxationszeit

Von Erich Fischer

Universität Tübingen und Forschungsstelle für Spektroskopie in der Max-Planck-Gesellschaft, Hechingen

(Z. Naturforsch. 5a, 628—629 [1950]; eingeg. am 11. Nov. 1950)

Die Erweiterung der Onsager'schen Theorie des inneren Feldes auf die Relaxationserscheinung der Dispersion und Absorption von Kurzwellen in Dipolflüssigkeiten¹ ermöglicht Aussagen über die Assoziation polarer Moleküle. Dabei ist wesentlich, daß die Relaxationszeiten von Dipolmolekülen für den assoziationsfreien Zustand sehr verdünnter Auflösung in unpolaren Flüssigkeiten durch systematische Untersuchung bekannt sind, und zwar in ihrer Abhängigkeit von Molekül-Volumen, -Form und innermolekulare Beweglichkeit². Auch an den meisten der zu H-Brücken-Assoziation befähigten Moleküle läßt sich durch Messungen in verdünnter Lösung die Relaxationszeit τ des entassoziierten Moleküls bestimmen und durch Vergleich mit den bekannten Relaxationszeiten anderer Moleküle etwas über die innermolekulare Beweglichkeit des zu Assoziation fähigen Dipols aussagen. Dieser τ -Wert für das verdünnt gelöste Molekül ist dann die Ausgangsbasis, welche ermöglicht, bei höheren Konzentrationen bis zur reinen Flüssigkeit den Beginn und das Fortschreiten der Assoziation festzustellen aus der damit verbundenen Zunahme der Relaxationszeit, die gerade als

Folge der durch die Assoziation bewirkten Einschränkung der innermolekularen Beweglichkeit und der Volumenvergrößerung der zu orientierenden Partikeln auftritt. Einige Ergebnisse solcher Untersuchungen, von denen z. Tl. bereits in Vorträgen³ berichtet wurde, seien kurz mitgeteilt.

Als unpolares Lösungsmittel diente CCl_4 , in welchem π -Komplexe zwischen Lösungsmittel und Gelöstem sich nicht bemerkbar machen⁴. Gemessen wurde aus dem dielektrischen Verlust im Meterwellengebiet die „effektive Relaxationszeit“⁵ (τ), die sich, falls mehrere Relaxationszeiten vorhanden, in bestimmter Weise aus den Einzelwerten zusammensetzt.

Bei Chlorbenzol und α -Bromnaphthalin als Beispiele nicht assoziierender Moleküle bleibt bei allen Konzentrationen (in CCl_4) bis zur reinen Flüssigkeit τ/η weitgehend konstant ($\tau \sim \frac{\eta}{kT} f$; V = Partikelvolumen, η = Viskosität, f = Funktion der Form und inneren Beweglichkeit des Moleküls), wenn τ unter Berücksichtigung des Onsager-Feldes ausgewertet wird.

Phenol beginnt bei Konzentrationen unter 0,02 (Molenbruch) mit einer Relaxationszeit ($0,9 \cdot 10^{-11}$ sec), die (im Vergleich zu Chlorbenzol $1,2 \cdot 10^{-11}$ sec) eine gewisse, wenn auch nicht völlig freie Beweglichkeit des OH-Dipols gegen den Phenylrest erkennen läßt. Es folgt dann sofort (besonders stark zwischen 0,05 und 0,1) ein starker Anstieg als Folge der Assoziation. Aus dem Verlauf von τ/η und seiner Temperaturabhängigkeit folgen mittlere Zähligkeiten und eine Assoziationsenergie, die im wesentlichen den UR-spektroskopisch⁶ im Gebiet bis 0,25 ermittelten

¹ E. Fischer, Ann. Physik 6, 117 [1949].
² s. E. Fischer, Z. Naturforsch. 4a, 707 [1949] und die dort unter 3, 4, 5 zitierten Arbeiten.

³ E. Fischer, Physiker-Tagung in Bonn, Sept. 1949.

Physiker-Tagung Württembg.-Baden, Freiburg, Dez. 1949.

⁴ W. Lüttke u. R. Mecke, Z. Elektrochem. angew. physik. Chem. 53, 244 [1949].

⁵ E. Fischer, Physik. Z. 40, 645 [1939], S. 648 und 2.

⁶ R. Mecke, Z. Elektrochem. angew. physik. Chem. 52, 269 [1948].